数理解析研究所講究録
494巻 1983年 137-147

ディジタル幾何学における図形と そのComputational Complexity について

広島大学　工学部　　中村　昭　(Akira NAKAMURA)
広島大学　工学部　　会沢　邦夫 (Kunio　AIZAWA)

1．はじめに

Image processing或いはComputer　graphicsの基礎理論として，最近ディジタル幾何学が定義され，興味ある話題を提供している（〔1〕，〔2〕）。これらは，主に平面画像の中に現れるパターンの分類に関係している。この分類は，パターンの幾何学的性質をもとにして行われる。しかし，これをディジタル計算機で処理するためには，パターンはディジタル化されていなくてはならない。このため，この分類は，与えられた格子点の有限集合が，ある幾何学的性質を持つ実際の図形から得られるか否かを判定する問題に変換される。一般に，このような判定は自明ではなく，直線に対する議論は文献〔3〕－〔5〕に見られる。ここでは，あるディジタル化の方法をもとに，円と長方形を認識するアルゴリズムと，そのComputational Complexityについて述べる。

2．準備

任意の二点 p，q に対して pq は pとqを結ぶ線分を表し，｜pq｜は pq の長さを表すとする。Qを，平面の任意の有限部分とする。ディジタル計算機での処理のため，普通Qは格子

点の有限集合で表される。この集合は，Qのディジタル像と呼ばれ，Qからそのディジタル像への写像をディジタル化と呼ぶ。ここで用いられるディジタル化は，主に曲線に対して使われているもので，次のように定義される。

定　義　1．(Kim's grid digitization)

格子点の有限集合Dは，次の二つの条件が成り立つならば，曲線ｆのディジタル像であるといわれ，Ｄ＝ＩＫ（ｆ）と表される。

（ｉ）　格子点ｄ＝（ｈ，ｋ）がＤの要素であれば，ｆは次のような点ｚ＝（ｘ，ｙ）で格子を横切る：　$\max\{|h-x|, |k-y|\} < 1$　かつｄはｆの右側にある。

(ii)　格子点ｄ＝（ｈ，ｋ）がＤの要素でないならば，上の条件を満足する横断点ｚ＝（ｘ，ｙ）は存在しない。

上の定義では，ｆはある方向を持つと仮定され，この方向によって，ｆの“右側”が定められている。今後，円と長方形の外周は，時計回りの方向を持つと仮定する。

定　義　2．

（ｉ）　ディジタル線分

格子点の有限集合Dは，Ｄ＝ＩＫ（ｆ）なる線分ｆが存在するときまたそのときに限り，ディジタル線分と呼ばれる。

(ii)　ディジタル円

格子点の有限集合Dは，Ｄ＝ＩＫ（ｃ）なる円ｃが存在するときまたそのときに限りディジタル円と呼ばれる。

(iii)　ディジタル長方形

格子点の有限集合Dは，Ｄ＝ＩＫ（ｒ）なる長方形ｒが存在するときまたそのときに限り，ディジタル長方形と呼ばれる。

ディジタル円とディジタル長方形を上のように定義した場合，一点またはたがいに接する数個の点からなる退化した円や長方形が生ずる可能性がある。しかしここでは，このような図形の認識はそれほど重要でないとして考えないことにする。

3．円を認識するアルゴリズム

今，d＝（p，q）を平面上の任意の点とし，x＝p，y＝q，y＝x＋q－p，y＝－x＋q＋p－1によって分割される８つの楔形の部分平面をOctants と呼ぶ。それらは，直線y＝qのx＞0なる部分のすぐ上にあるものから順に，反時計回りに，ローマ数字が付されているものとする。このとき，格子点の有限集合Ｄと点ｄに対する次のような条件を考える。

（1）　Ｒの各要素は，少なくとも二つの８－隣接点をもつ。そして，

（2）　m＝（pi,qi），n＝（pj,qj）を次のような格子点とする：

$$|dm|^2 = \max \{ |da|^2 \mid a \in R \},$$

$$|dn|^2 = \min \{ |da|^2 \mid a \in R \}。$$

このｎに対して，n'を次のように定める。

$$n' = \begin{cases} (pj+1, qj) & n \in \text{Octant I または VIII のとき,} \\ (pj, qj+1) & n \in \text{Octant II または III のとき,} \\ (pj-1, qj) & n \in \text{Octant IV または V のとき,} \\ (pj, qj-1) & n \in \text{Octant VI または VII のとき。} \end{cases}$$

ならば，$|dm|^2 < |dn'|^2$ が成り立つ。

今後，上の条件をCDC-K と呼ぶことにする。このとき，次の補題を示すことができる。

補　題 1.　与えられた格子点の有限集合Ｒと，与えられた一点ｄに対して，Ｒとｄが条件CDC-K を満たすときまたそのときに限りＲ＝ＩＫ（ｑ）で中心がｄであるような円ｑが存在する。

証　明：　まず，ｄを中心としＲ＝ＩＫ（ｑ）なる円ｑが存在するならば，Ｒは条件CDC-K を満たすことを証明する。条件CDC-K （１）が成り立たないと仮定する。ならば，図１に示すような点がＲに含まれることになり，明らかにＲはディジタル円ではない。つぎに，条件CDC-K （２）が成り立たないとする。Octant Ｉでは，ｑが格子を横切るどの二点を結ぶ線分も－１より小さい傾きを持つ。従って，文献〔３〕に示されるように，Ｒのどの点もｑから格子幅の½以上水平方向に離れることができない。同様に，Octant II では，格子幅の½以上垂直方向に離れることができない。このような性質が，各Octantに対して成り立つので，もしCDC-K （２）が成り立たないならばｍとｎをともにＩＫ（ｑ）に含む円ｑは存在しない。逆に，条件CDC-K がＲに対して成り立っているならば，｜dm｜＜ｒ ＜｜dn'｜を満足する任意のｒにたいして，ｄを中心とし半径ｒの円ｑはＲ＝ＩＫ（ｑ）なる性質を持つ。なぜなら，もしＩＧ（ｑ）に含まれるがＲには含まれないような格子点ａが存在するならば，｜da｜は｜dm｜より大きいかまたは｜dn｜より小さい。これはｍとｎの定義に矛盾する。また，もしＲには含まれるがＩＧ（ｑ）には含まれない格子点ａが存在するならば，前の議論からＲ　ＩＧ（ｑ）が成り立つ。しかし，このようなＲに対して条件CDC-K は成り立たない。■

次に，条件CDC-K を用いて中心ｄを有限時間内に発見し，Ｒがディジタル円であるか否かを判定するアルゴリズムを示す。

d1＝（p,q），d2＝（p+1,q），d3＝（p+1,q+1），d4 ＝（p,q+1）なる格子点を4-centers と呼び，図２のようにOctants を定める。

このとき，図３に示すアルゴリズムRDC-K を考えるならば次の定理を証明することができる。

定　理　1．　格子点の有限集合Ｒは，ＲがアルゴリズムRDC-K によって受理されるときまたそのときに限り，ディジタル円である。

証　明：　まず，アルゴリズムRDC-K が必ず停止することを示す。Ｒの内部には有限個の格子点しかないので，（ａ）－（ｄ）の繰り返しは（ｂ）－（ｃ）の繰り返しが停止するならば，必ず停止する。そこで，（ｂ）－（ｃ）の繰り返しが無限に続き得ると仮定する。ならば，垂直二等分線は有限本しかないので，step（ｃ）で同じものが一度以上使われなくてはならない。しかし，そのときはｄとｍは垂直二等分線を挟んで反対側にあるので，新しいＳは空になる。これは仮定と矛盾する。故に，（ｂ）－（ｃ）の繰り返しは必ず停止する。次に，RDC-K の正当性を示す。もしＲがstep（ｂ）で受理されるならば，Ｒとｄは条件CDC-K を満たす。補題１よりＲはディジタル円である。逆に，Ｒがstep（ｄ）で棄却されると仮定する（最初で棄却される場合は明らか）。ならば，正方形d0d1d2d3とすべての垂直二等分線によって定義されるどの多角形の重心も，ｑ＝ＩＫ（R）なる円ｑの中心にならない。ところで，点m，n，n'，ｄ の定義から，どの多角形に含まれるｄに対してもＲとｄが条件CDC-K を満たさないならば，CDC-K を満たす点がＲの内部に存在しないことがわかる。故に，格子点の有限集合Ｒはディジタル円ではない。■

4．長方形を認識するアルゴリズム

一本のディジタル線分Ｓに含まれる一つの格子点ａを定めたとき，ａを通りＳ＝ＩＫ（ｆ）なる線分ｆのとり得る最大の傾きをｍ（ａ）とし，最小の傾きをｎ（ａ）とする。また，ａを通り傾きｍ（ａ），ｎ（ａ）持つ線分でＳの原像になるものを，それぞれLM (a)，Ln (a) と呼ぶことにする。

補　題　2．　Ｒを任意のディジタル長方形とする。Ｒを構成する四つのディジタル線分上に格子点ai（１≦ｉ≦４）を一点ずつ定める。ならば，少なくとも一辺がLm (ai)，Ln (ai)

（$1 \leqq i \leqq 4$）のどれか一つに一致し，かつR＝ＩＫ（r）なる長方形ｒが存在し，その逆も成り立つ。

証　明：　Rはディジタル長方形なのでR＝ＩＫ（r'）なる長方形r'が存在する。もしr'がLm（ai），Ln（ai），（$1 \leqq i \leqq 4$）のどれかを辺として持つならば，ｒ＝r'とおけばよい。そうでないなら，ｒを回転移動すればよい。逆は明らか。■

このとき，格子点の有限集合Rに対して，次のような条件を考える。

（1）　Rのそれぞれの要素は，少なくとも二つの８－隣接点をもつ。

（2）　$R = P1 \cup P2 \cup P3 \cup P4$，ここで，Pi（$1 \leqq i \leqq 4$）はディジタル線分であるが，$Pi \cup \{d\}$　（$d \notin Pi$かつ$d \in R$）はディジタル線分ではない。

（3）　Ph（$1 \leqq h \leqq 4$）は，ある一つのPi（$i \neq h$）以外の二本の線分Pj，Pkと出会っていて，Phの両端点はそれぞれPjとPkの端点である。

（4）　以下の条件を満足する四つの格子点a1,a2,a3,a4，（$ai \in Pi$）が存在する。

・PiとPjが，出会っていないならば，
区間〔n（ai），m（ai）〕と〔n（aj），m（aj）〕には共通部分が存在する。この共通部分の最大をmij（ah），最小をnij（ah），（h＝i，j）とする（図４参照）。

・ある同じ傾きを持つ線分（例えば）Lm13（a1），Lm13（a3）に対して次の不等式が成り立つ（図５参照）。

線分a1a2，a2a3，a3a4，a4a1　の中点をそれぞれc1，c2，c3，c4　とする。

ならば，

$$|c4b2|^2 \leqq |c4a4|^2 \leqq |c4b1|^2,$$
$$|c1b3|^2 \leqq |c1a1|^2 \leqq |c1b4|^2,$$
$$|c2b6|^2 \leqq |c2a2|^2 \leqq |c2b5|^2,$$
$$|c3b7|^2 \leqq |c3a3|^2 \leqq |c3b8|^2.$$

今後，上の条件をCDR-K と呼ぶことにする。

定　理　2.　格子点の有限集合Rは，条件CDR-K を満たすときまたそのときに限り，ディジタル長方形である。

証　明：　まず，R＝ＩＫ（ｒ）なる長方形ｒが存在するならば，Rは条件CDR-K を満たすことを示す。そのような長方形が存在するならば，Rは明らかにCDR-K （１）－（３）を満たす。また，補題１よりCDR-K （４）を満たすことも容易に判る。逆に，条件CDR-K がRに対して成り立っていると仮定する。CDR-K （１）－（３）から，Rは四つのディジタル線分からなる中空の図形であることが容易に判る。また，CDR-K （４）より，図５に示されるようなLm13 (a1) に垂直でそれぞれa2，a4を通る二本の線分と，Lm13 (a3) に垂直でそれぞれa2，a4を通る二本の線分を引くことができる。Lm13 (a1) とLm13 (a3) は平行なので，これらの線分は長方形を構成する。■

5．時間計算量について

ディジタル円RがN×Nの大きさの平面に含まれているならば，円周上の点はO (N) 個ある。従って垂直二等分線はO（N^2）本あり，（ｂ）－（ｃ）の繰り返しはO（N^2）回の計算を必要とする。さらに，Rの内部にはO（N^2）個の格子点があるので，結局アルゴリズムRDC-K はO（N^4）の時間計算量を持つ。しかし，Rの中心を含む正方形Sの候補をあらかじめ定数個に定めることが可能である。例えば，中心は最も左（又は右）にあるRの格子点と同じ行にあるRの格子点との中点の近く（±½）の列にあるはずである。また同時に，最も上（又は下）にあるRの格子点と同じ列にあるRの格子点との中点の近くの行に存在しなくてはならない。このような方法で，高々四個のSの候補を定めることができる。従って，RDC-K を以上の方針で修正するならば，新しいアルゴリズムはO（N^2）の時間計算量を持つはずである。

次に，ディジタル長方形RがN×Nの大きさの平面に含まれているならば，Rの点はO（N）個ある。条件CDR-K （1）と（3）を判定するには明らかにO（N）回の計算で十分である。また，文献〔5〕で述べられているように，CDR-K （2）の判定もO（N）回でできる。ディジタル線分の傾きはO（N）で求められ，CDR-K （4）の不等式の判定は定数オーダーである。しかし，CDR-K （4）の判定は，すべてのa1，a2，a3，a4に対して行われるので，結局CDR-K はO（N^5）の時間計算量を持っている。

References

〔1〕A. Rosenfeld：Picture Languages, Academic Press, New York (1979), Chapter 2, Digital Geometry.
〔2〕E. F. Krause：Taxicab Geometry, Addison-Wesley, Menlo Park (1975).
〔3〕A. Rosenfeld：Digital straight line segments, IEEE Trans. Computer 23 (1974), pp. 1264-1269.
〔4〕C. E. Kim：On cellular straight line segments, Computer Graphics and Image Processing 18, (1982), pp. 369-381.
〔5〕A. Rosenfeld and C. E. Kim：How a digital computer can tell whether a line is straight, The American Mathematical Monthly, Vol.81, No.4 (1982), pp.230-235.
〔6〕A. Nakamura and K. Aizawa：On digital circles, TR-1193,Computer Science Center, Univ. of Maryland (1982).
〔7〕M. I. Shamos：Geometric complexity, Proc. 7th ACM Symposium on the Theory of Computing (1975), pp.224-233.

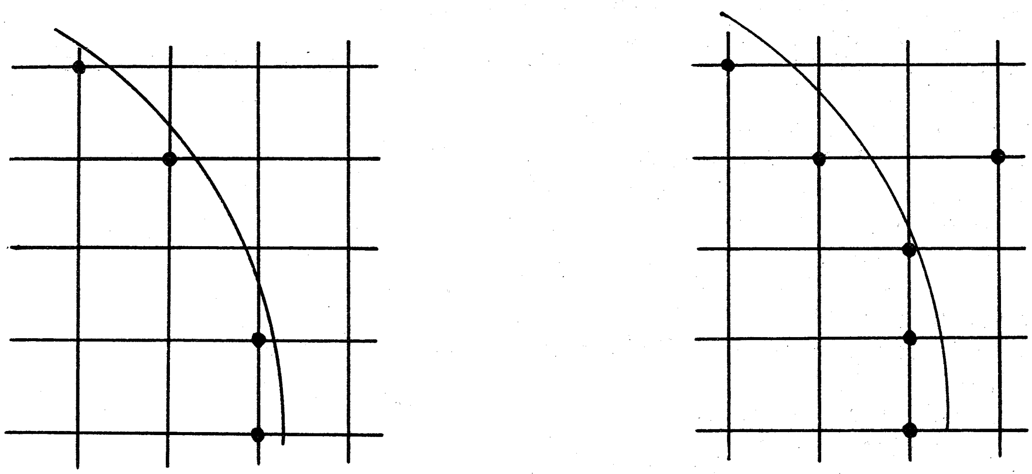

図 1

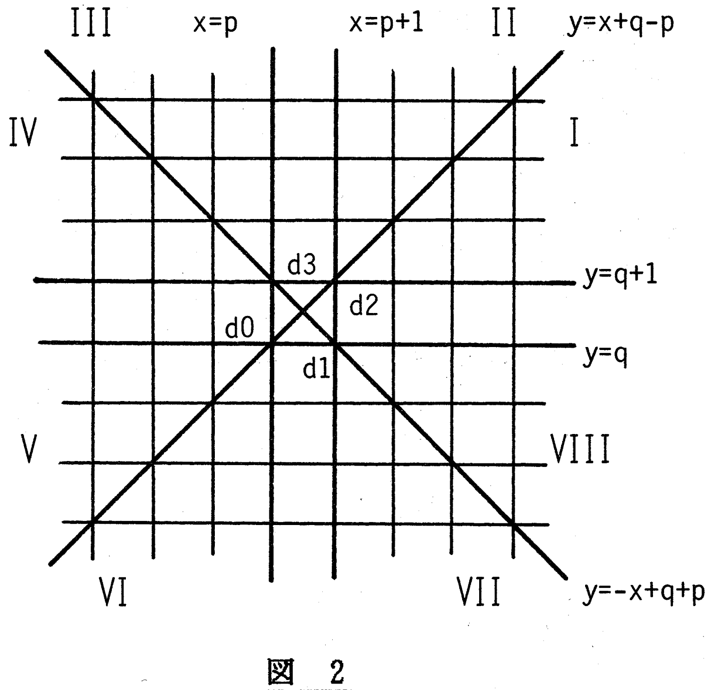

図 2

Algorithm RDC-G :

if CDC-K (1) holds for R then go to step (a) ;
else R is rejected ; stop; end
(a) Take new 4-centers d0, d1, d2, d3 at any interior lattice points of R and call it polygon S ;
(b) Let d be the barycenter of polygon S;
if CDC-K (2) holds for R with d then
begin R is accepted ; stop ; end
else go to step (c) ;
(c) Let f (x) = ax+b be the perpendicular bisector of mn' ;
if m is in the half-plane F defined by f (x) > 0 then
Set new S as $S \cap F$;
if m is in the half-plane G defined by f (x) < 0 then
Set new S as $S \cap G$;
if f is null then go to step (d) ;
else go to step (b) ;
(d) if there exist new 4-centers then go to step (a) ;
else begin R is rejected ; stop; end

図 3

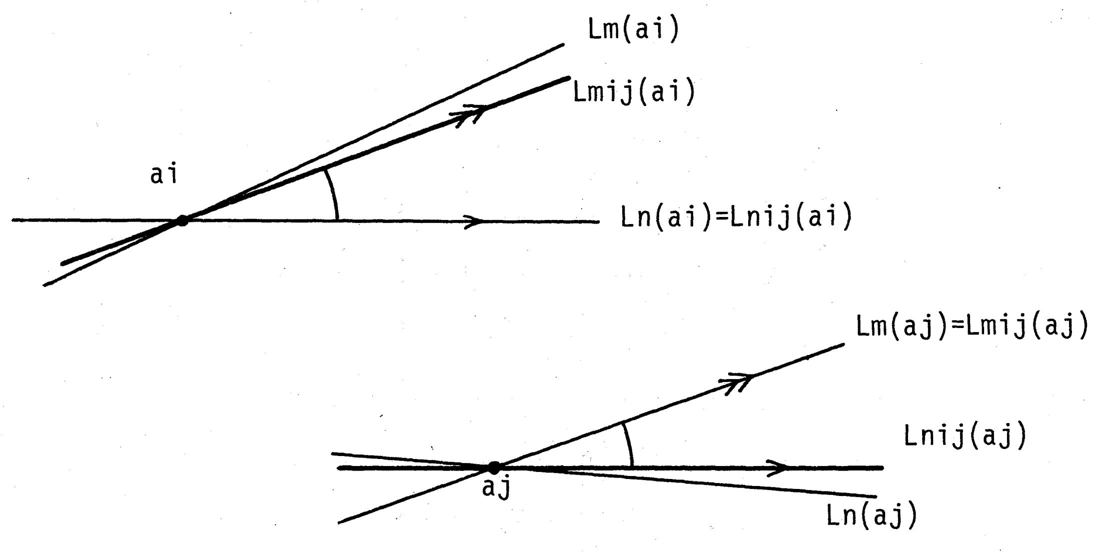

図 4

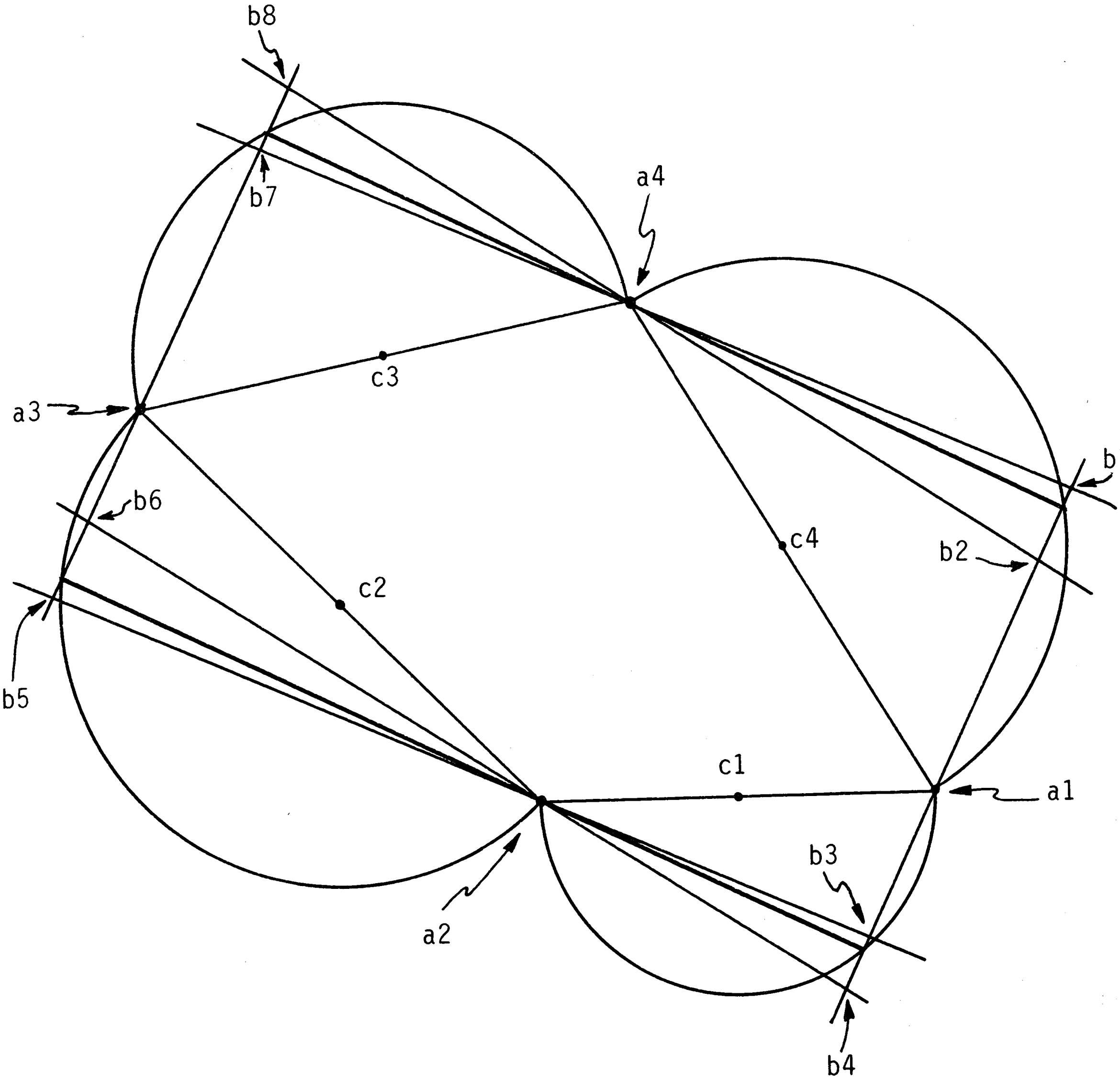

図 5